Derivabilidad

V.M. Jiménez

Universidad de Alcalá (UAH)

Derivabilidad

Vamos a acercarnos al concepto de **derivada** a través de la noción de "*velocidad puntual*".

Derivabilidad

Vamos a acercarnos al concepto de **derivada** a través de la noción de "*velocidad puntual*".

Imaginad una partícula (o un coche, o una bicicleta o un gatito explosivo, lo que sea...) moviéndose en el espacio.

Derivabilidad

Vamos a acercarnos al concepto de **derivada** a través de la noción de "*velocidad puntual*".

Imaginad una partícula (o un coche, o una bicicleta o un gatito explosivo, lo que sea...) moviéndose en el espacio.

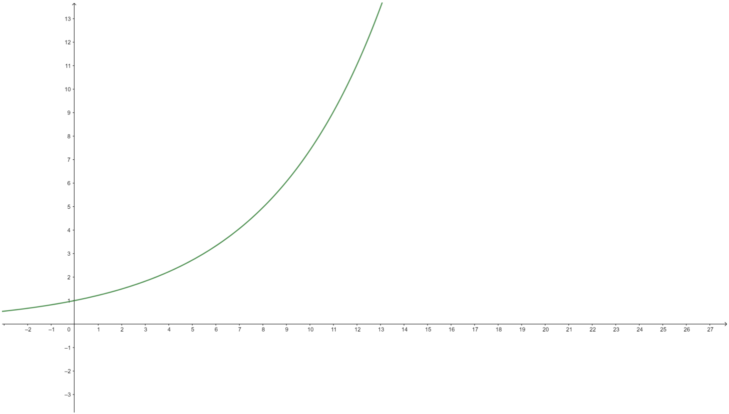
¿Cómo definirías la velocidad en un punto dado?

Derivabilidad

Así, dibujamos una gráfica de tal manera que el eje x define el **tiempo** (en segundos) y el eje y define el **espacio recorrido** (en metros).

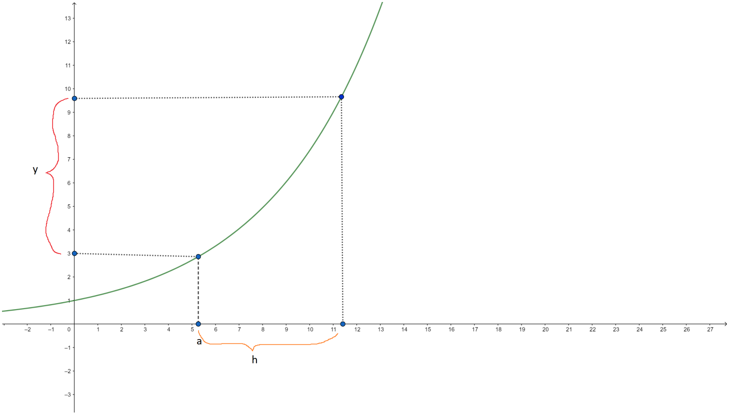
Derivabilidad

Así, dibujamos una gráfica de tal manera que el eje x define el **tiempo** (en segundos) y el eje y define el **espacio recorrido** (en metros).



Derivabilidad

A partir de cierto valor "a", pasados "h" segundos, ha recorrido "y" metros.

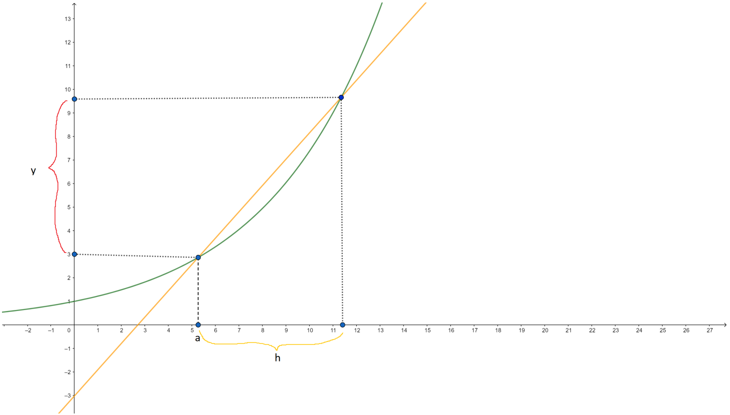


Derivabilidad

Vamos (en todos los pasos) a dibujar la gráfica asociada a un corredor que ha recorrido la misma distancia (*"y"*) en el mismo tiempo (*"h"*) pero a **velocidad constante**.

Derivabilidad

Vamos (en todos los pasos) a dibujar la gráfica asociada a un corredor que ha recorrido la misma distancia (“y”) en el mismo tiempo (“h”) pero a **velocidad constante**.



Derivabilidad

¿A qué velocidad ha recorrido el espacio h?

Derivabilidad

¿A qué velocidad ha recorrido el espacio h?

Desde el segundo "a" hasta el segundo "$a+h$", he recorrido "y" metros. Así, la **velocidad promedio** será:

Derivabilidad

¿A qué velocidad ha recorrido el espacio h?

Desde el segundo "*a*" hasta el segundo "*a*+*h*", he recorrido "*y*" metros. Así, la **velocidad promedio** será:

$$\textbf{Velocidad promedio} = \frac{y}{h}$$

Derivabilidad

¿A qué velocidad ha recorrido el espacio h?

Desde el segundo "a" hasta el segundo "$a+h$", he recorrido "y" metros. Así, la **velocidad promedio** será:

$$\textbf{Velocidad promedio} = \frac{f\,(a+h) - f\,(a)}{(a+h) - a}$$

Derivabilidad

¿A qué velocidad ha recorrido el espacio h?

Desde el segundo "a" hasta el segundo "$a+h$", he recorrido "y" metros. Así, la **velocidad promedio** será:

$$\textbf{Velocidad promedio} = \frac{f\,(a+h) - f\,(a)}{h}$$

Derivabilidad

¿A qué velocidad ha recorrido el espacio h?

Desde el segundo "a" hasta el segundo "$a+h$", he recorrido "y" metros. Así, la **velocidad promedio** será:

$$\textbf{Velocidad promedio} \;=\; \frac{f\left(a+h\right)-f\left(a\right)}{h}$$

Ambos corredores (verde y amarillo) tienen la misma **velocidad promedio** entre a y $a+h$.

¿A qué velocidad ha recorrido el espacio h?

Desde el segundo "*a*" hasta el segundo "*a*+*h*", he recorrido "*y*" metros. Así, la **velocidad promedio** será:

$$\textbf{Velocidad promedio} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

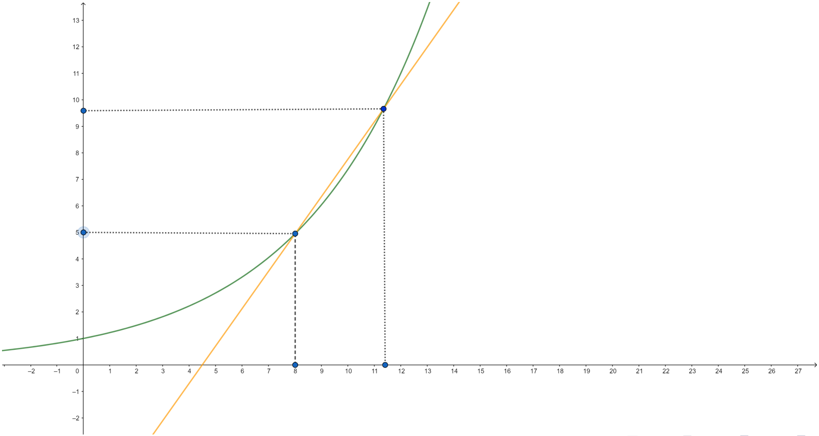
Ambos corredores (verde y amarillo) tienen la misma **velocidad promedio** entre a y $a+h$. Así, la velocidad promedio no es una buena medida de la velocidad "*cerca de* a".

Derivabilidad

Cuanto más nos acerquemos hacia "a" ("h" más pequeño), la **velocidad promedio** resultará ser una mejor aproximación de la velocidad en "a".

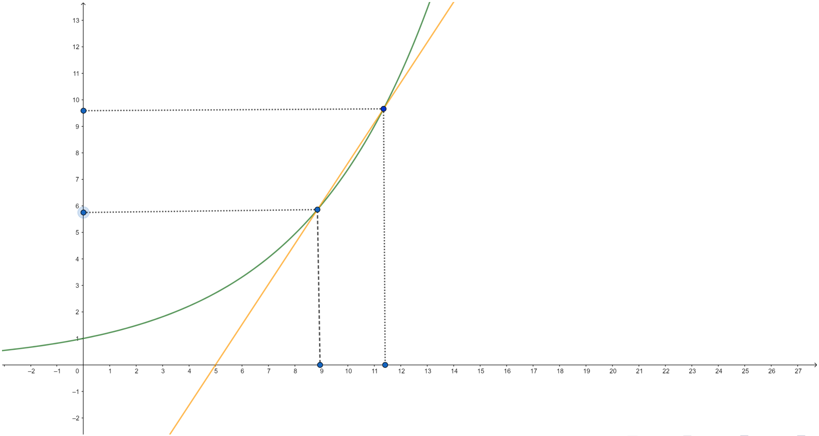
Derivabilidad

Cuanto más nos acerquemos hacia "a" ("h" más pequeño), la **velocidad promedio** resultará ser una mejor aproximación de la velocidad en "a".



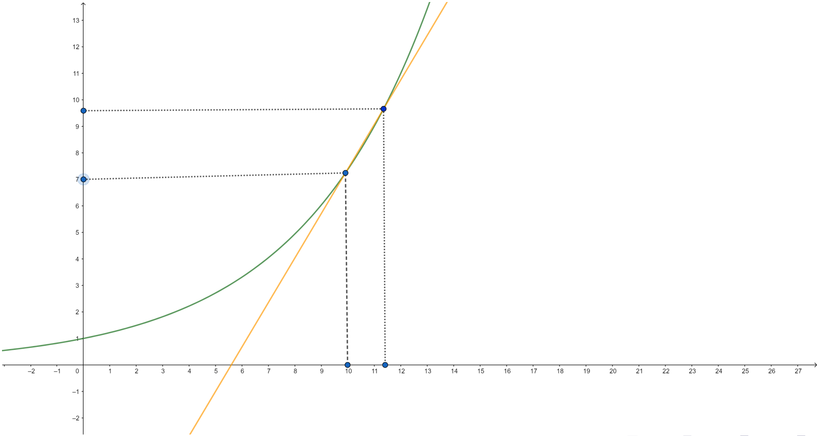
Derivabilidad

Cuanto más nos acerquemos hacia "*a*" ("*h*" más pequeño), la **velocidad promedio** resultará ser una mejor aproximación de la velocidad en "*a*".



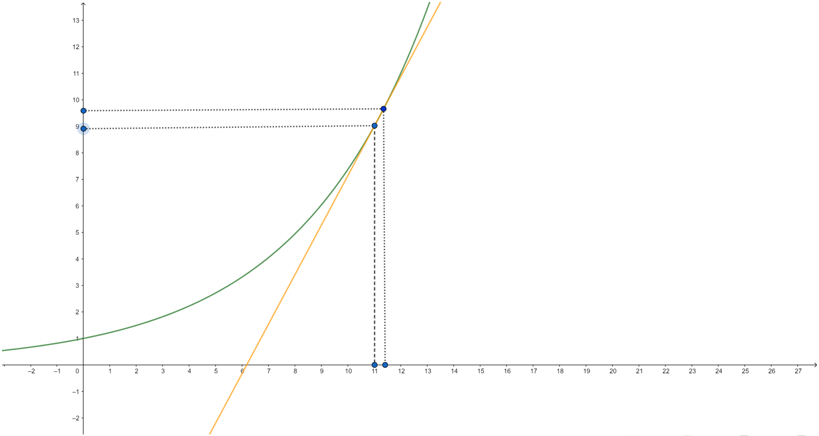
Derivabilidad

Cuanto más nos acerquemos hacia "a" ("h" más pequeño), la **velocidad promedio** resultará ser una mejor aproximación de la velocidad en "a".



Derivabilidad

Cuanto más nos acerquemos hacia "*a*" ("*h*" más pequeño), la **velocidad promedio** resultará ser una mejor aproximación de la velocidad en "*a*".



¿Cuál sería entonces la velocidad en el punto “a”?

Derivabilidad

¿Cuál sería entonces la velocidad en el punto "a"?

Velocidad puntual en a $= f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Ejercicio:

Calcular las siguientes derivadas:

- $f(x) = x$
- $g(x) = x^2$
- $h(x) = \frac{1}{x}$

Derivabilidad

Definición

Sea f una función definida en una intervalo abierto I con $a \in I$. Decimos que f es **derivable en** a si existe y es finito el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En este caso, llamamos **derivada en** a a dicho límite y se denota por $f'(a)$, i.e.,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Diremos que f es **derivable**, si es derivable en todo punto.

Derivabilidad

Ejemplo

Calcula la derivada de la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$.

Derivabilidad

Observación 1

Otra forma de escribir la derivada de una función f en un valor a es

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivabilidad

Observación 1

Otra forma de escribir la derivada de una función f en un valor a es

$$f^{'}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivabilidad

Observación 2

Otra manera de obtener la noción de derivada es a través del cálculo de la *"pediente"*.

Derivabilidad

Observación 2

Otra manera de obtener la noción de derivada es a través del cálculo de la *"pediente"*. En particular, se trata de caulcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, que será precisamente $f^{'}(a)$ (a esta recta se llega aproximando de una manera similar a como se hace al principio de las transparencias con la recta amarilla).

Derivabilidad

Observación 2

Otra manera de obtener la noción de derivada es a través del cálculo de la *"pediente"*. En particular, se trata de caulcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, que será precisamente $f'(a)$ (a esta recta se llega aproximando de una manera similar a como se hace al principio de las transparencias con la recta amarilla).

La ecuación de esta recta entonces será

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Derivabilidad

Definición

Sea f una función definida, cómo mínimo, a la izquierda de un valor con a, es decir, en un intervalo $(a-\epsilon, a]$. Decimos que f es **derivable en a por la izquierda** si existe y es finito el límite

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En este caso, llamamos **derivada en a por la izquierda** a dicho límite y se denota por $f'_-(a)$, i.e.,

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivabilidad

Definición

Sea f una función definida, cómo mínimo, a la derecha de un valor con a, es decir, en un intervalo $[a, a-\epsilon)$. Decimos que f es **derivable en a por la derecha** si existe y es finito el límite

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En este caso, llamamos **derivada en a por la derecha** a dicho límite y se denota por $f'_+(a)$, i.e.,

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivable

Sea f una función derivable definida en un intervalo I.

Derivable

Sea f una función derivable definida en un intervalo I. Para todo valor, a, de I podemos definir $f'(a)$.

Derivable

Sea f una función derivable definida en un intervalo I. Para todo valor, a, de I podemos definir $f^{'}(a)$.

$$a \mapsto f^{'}(a)$$

Derivable

Sea f una función derivable definida en un intervalo I. Para todo valor, a, de I podemos definir $f^{'}(a)$.

$$a \mapsto f^{'}(a)$$

¡$f^{'}$ es una función!

Derivable

Sea f una función derivable definida en un intervalo I. Para todo valor, a, de I podemos definir $f^{'}(a)$.

$$a \mapsto f^{'}(a)$$

¡$f^{'}$ es una función!

$$f \text{ función derivable definida en } I \quad \mapsto \quad f^{'} \text{ función definida en } I$$

Derivabilidad

Teorema

Si f sea derivable en a, entonces f' es continua en a.

Derivabilidad

Propiedades

Sean f y g derivables a. Entonces

a) $(f \pm g)^{'}(a) = f^{'}(a) \pm g^{'}(a)$

Derivabilidad

Propiedades

Sean f y g derivables a. Entonces

b) $(f \cdot g)^{'}(a) = f^{'}(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g^{'}(a)$

Derivabilidad

Propiedades

Sean f y g derivables a. Entonces

c) **Regla de la cadena:** $(f \; o \; g)^{'}(a) = f^{'}(g(a)) \cdot g^{'}(a)$

Derivabilidad

Ejercicio

Sean f y g derivables a con $g(a) \neq 0$. Probar las siguientes identidades,

- $$(kf)'(a) = kf'(a)$$
- $$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$$
- $$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Derivada de la función inversa

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona en un intervalo abierto I. Si f es derivable en $a \in I$ con $f^{'}(a) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en a y

$$\left(f^{-1}\right)^{'}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Derivabilidad

Derivada de la función inversa

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona en un intervalo abierto I. Si f es derivable en $a \in I$ con $f^{'}(a) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en a y

$$\left(f^{-1}\right)^{'}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

¿Podría ocurrir que $f^{'}(a) = 0$?

Derivabilidad

Derivadas conocidas

$$f(x) \; = \; c, \text{ constante,}$$

$$f'(x) = 0.$$

Derivabilidad

Derivadas conocidas

$$f(x) = x^n,$$

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Derivabilidad

Derivadas conocidas

$f(x) = sen(x)$, número entero

$$f^{'}(x) = cos(x).$$

Derivabilidad

Derivadas conocidas

$$f(x) = cos(x),$$

$$f'(x) = -sen(x).$$

Derivabilidad

Derivadas conocidas

$$f(x) = log_a(x),$$

$$f'(x) = \frac{1}{x\, ln(a)}.$$

Derivadas conocidas

$$f(x) \;=\; a^x,\, a > 0$$

$$f'(x) = a^x\, ln(a).$$

Derivabilidad

Derivadas conocidas

$$f(x) = x^a,\ a \in \mathbb{R}\ x > 0$$

$$f'(x) = ax^{a-1}$$

Derivabilidad

Derivadas conocidas

$$f\left(x\right) = arcsen\left(x\right)$$

$$f^{'}\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Derivabilidad

Derivadas conocidas

$$f\,(x) \;=\; arccos\,(x)$$

$$f^{'}\,(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Derivabilidad

Derivadas conocidas

$$f(x) = arctan(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ejercicio:

Sea f una función derivable. Calcular las siguientes derivadas:

- $$f(x)^2$$
- $$Ln(f(x))$$
- $$e^{f(x)}$$

Derivabilidad

Teorema de Rolle

Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y con $f(a) = f(b)$, entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f'(x_0) = 0.$$

Derivabilidad

Teorema del valor medio

Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b). Entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Derivabilidad implítica

Una función está en forma implícita cuando viende dada de la forma

$$F(x, y) = 0,$$

de tal manera que, posiblemente, y no se puede despejar en función de x, es decir, no se puede encontrar *la forma explícita de la función*

Derivabilidad implícita

Una función está en forma implícita cuando viende dada de la forma

$$F(x, y) = 0,$$

de tal manera que, posiblemente, y no se puede despejar en función de x, es decir, no se puede encontrar *la forma explícita de la función*

Ejemplo:

$$x^2 + y^2 - 7 = 0$$

Derivabilidad implícita

Aún cuando no tenemos la forma explícita de la función, se puede calcular su derivada:

Paso 1 Escribimos $y = y(x)$. Así, se tiene $F(x, y(x)) = 0$

Derivabilidad implícita

Aún cuando no tenemos la forma explícita de la función, se puede calcular su derivada:

Paso 1 Escribimos $y = y(x)$. Así, se tiene $F(x, y(x)) = 0$

Paso 2 Derivamos respecto de x la función $F(x, y(x))$ e igualamos a 0.

Derivabilidad implícita

Ejemplo:

$$x^2 + y^2 - 7 = 0$$

Paso 1 $x^2 + y\left(x\right)^2 - 7 = 0$

Derivabilidad implícita

Ejemplo:

$$x^2 + y^2 - 7 = 0$$

Paso 1 $x^2 + y(x)^2 - 7 = 0$

Paso 2

$$\begin{aligned} 2x + 2y(x)\, y'(x) &= 0 \\ 2y(x)\, y'(x) &= -2x \\ y'(x) &= -\frac{2x}{2y(x)} \quad y(x) \neq 0 \\ y'(x) &= -\frac{x}{y(x)}, \; y(x) \neq 0 \end{aligned}$$

Derivación logarítmica

Para algunas funciones $y = f(x)$, generalmente potencias de otras, cuya derivada se desea calcular, puede ser útil la **derivación logarítmica**.

Ejemplo:

$$f(x) = x^{sen(x)}$$

Paso 1 Tomamos logaritmos en la expresión $y = f(x)$. Así, queda

$$ln(y) = ln(f(x))$$

Paso 1 Tomamos logaritmos en la expresión $y = f(x)$. Así, queda

$$ln(y) = ln(f(x))$$

Paso 2 Se usan las propiedades de los logaritmos en $ln(f(x))$.

Paso 1 Tomamos logaritmos en la expresión $y = f(x)$. Así, queda

$$ln(y) = ln(f(x))$$

Paso 2 Se usan las propiedades de los logaritmos en $ln(f(x))$.

Paso 3 Se deriva implícitamente respecto de x y se despeja $y^{'}$.

Derivación logarítimica

Ejemplo:

$$f(x) = x^{sen(x)}$$

Paso 1

$$ln(y) = ln\left(x^{sen(x)}\right)$$

Derivación logarítimica

Ejemplo:

$$f(x) = x^{sen(x)}$$

Paso 1

$$ln(y) = ln\left(x^{sen(x)}\right)$$

Paso 2 Entonces

$$ln(y) = sen(x)\, ln(x)$$

Derivación logarítimica

Ejemplo:

$$f(x) = x^{sen(x)}$$

Paso 3 Así,

$$\begin{aligned}
(ln(y))' &= (sen(x)\, ln(x))' \\
\frac{y'}{y} &= cos(x)\, ln(x) + \frac{sen(x)}{x} \\
y' &= y\left(cos(x)\, ln(x) + \frac{sen(x)}{x}\right) \\
y' &= x^{sen(x)}\left(cos(x)\, ln(x) + \frac{sen(x)}{x}\right)
\end{aligned}$$

Ejercicios:

Determinar las siguientes derivadas exponiendo en cada uno de los pasos la propiedad que estamos usando:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $f(x) = \frac{3+x}{1-3x}$

c) $f(x) = arctg\left(\frac{sen(x)}{1+cos(x)}\right)$

d) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

Ejemplo

Vamos a resolver el apartado $a)$ como ejemplo.

Ejemplo

Vamos a resolver el apartado $a)$ como ejemplo. Escribamos

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

como $\frac{1}{g(x)}$, donde $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Ejemplo

Vamos a resolver el apartado $a)$ como ejemplo. Escribamos

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

como $\frac{1}{g(x)}$, donde $g(x) = \sqrt{1-x^2}$. Así, vamos a usar primero que

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

Ejemplo

Vamos a resolver el apartado $a)$ como ejemplo. Escribamos

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

como $\frac{1}{g(x)}$, donde $g(x) = \sqrt{1-x^2}$. Así, vamos a usar primero que

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

Ahora tenemos que calcular $g'(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)'$.

Ejemplo

Tenemos en cuenta ahora que

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

y la **regla de la cadena**, y se tiene que

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{\left(1-x^2\right)'}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

Tenemos ahora que calcular $\left(1-x^2\right)'$.

Ejemplo

Tenemos ahora que cuenta que

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$$

la derivada de una constante es 0 y la derivada de x^2 es $2x$. Así,

$$\left(1 - x^2\right)' = -2x.$$

Ejemplo

Juntando todo lo que sabemos,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' &= -\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{1-x^2} \\
&= -\frac{\left(1-x^2\right)'}{2\sqrt{1-x^2}\,(1-x^2)} \\
&= -\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}\,(1-x^2)} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\,(1-x^2)}
\end{aligned}$$